РЕПУБЛИКА СРПСКА

ЈУ СРЕДЊОШКОЛСКИ ЦЕНТАР ''НИКОЛА ТЕСЛА'' БРОД

Ул. Краља Петра I Ослободиоца 7, 74450 Брод, тел: 053/610-094, факс: 053/610-093, web: www.ssntb.org, e-mail: ss47@skolers.org

ДАТУМ:	30. март 2021. године
РЕАЛИЗАТОР:	Анита Лучановић
РАЗРЕД , ОДЈЕЉЕЊЕ И ЧАС:	III 1
НАСТАВНИ ПРЕДМЕТ:	Математика
НАСТАВНО ПОДРУЧЈЕ:	Аналитичка геометрија
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Права и елипса
ТИП ЧАСА:	Обрада
ОЧЕКИВАНИ ИСХОДИ:	Ученик треба да за задану праву утврди у каквом је односу са заданом кривом другог реда.

САДРЖАЈ ЧАСА:

ПРАВА И ЕЛИПСА

Однос неке праве $y = kx + n$ и елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ може се разматрати помоћу система једначина

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + n \end{cases}$$

Ако је $a^2k^2 + b^2 - n^2 > 0$, тада права и елипса имају двије заједничке тачке.
Ако је $a^2k^2 + b^2 - n^2 < 0$, тада права и елипса немају заједничких тачака, не сјеку се.
Ако је $a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$, права је тангента елипсе.

Дакле, **права $y = kx + n$ је тангента елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако и само ако је испуњен услов**

$$\boldsymbol{a^2k^2 + b^2 = n^2.}$$

Примјер 1

Испитај узајамни положај праве $x + y = 1$ и елипсе $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

Рјешење:

Једнчина елипсе је $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ па је $a^2 = 1, a = 1, b^2 = 4, b = 2$.

Одредимо експлицитни облик једначине праве $x + y = 1$:

$$y = -x + 1$$

Па је $\mathrm{k} = -1, \mathrm{n} = 1$.

Испитајмо сада какав је израз

$$a^2k^2 + b^2 - n^2$$
$$1 \cdot (-1)^2 + 4 - 1^2$$
$$1 \cdot 1 + 4 - 1$$
$$2 + 4 - 1$$
$$5 > 0$$

Пошто је израз позитиван тада права и елипса имају двије заједничке тачке.

Једначина тангенте елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, која садржи тачку *M*$(x_0, y_0)$ те елипсе има

облик

$$\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1}$$

Примјер 2

Одреди тангенту елипсе $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ у тачки додира $M\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Рјешење:

Тачка $M(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ припада елипси $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, пошто је

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

$$\frac{1^2}{4}+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

Онда је једначина тангенте дата са

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

$$\frac{1\cdot x}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y=1$$

$$\frac{x}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y=1-\frac{x}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{4-x}{4}\quad /\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y=\frac{4-x}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{(4-x)\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{4\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6}=\frac{-x\sqrt{3}}{6}+\frac{4\sqrt{3}}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{6}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Примјер 3

Одредимо једначину тангенте елипсе $x^2+4y^2=100$ која пролази кроз тачку $M(2,7)$.

Рјешење:

Повјеримо да ли тачка M припада елипси:

$M(2,7)$, па је $x=2, y=7$.

$$x^2+4y^2=100$$

$$2^2+4\cdot 7^2=100$$

$$4+4\cdot 49=100$$

$$4+196=100$$

$$200=100$$

Што није тачно, па тачка не припада елипси.

Произвољна права пролази кроз тачку $M(2,7)$, која није паралелна у оси и има једначину

$$y-y1=k(x-x1)$$

$$y-7=k(x-2)$$

$$y=kx-2k+7$$

Дакле, $n=-2k+7$.

Одредимо канонсли облик елипсе $x^2+4y^2=100$:

$$x^2+4y^2=100\ /:100$$

$$\frac{x^2}{100}+\frac{4y^2}{100}=\frac{100}{100}$$

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$$

имамо да је $a^2=100, a=10$ и $b^2=25, b=5$.

Услов додира је

$$a^2k^2+b^2=n^2$$

	$100k^2+25=(-2k+7)^2$ $100k^2+25=4k^2-28k+49$ $100k^2+25-4k^2+28k-49=0$ $96k^2+28k-24=0 \quad /:4$ $24k^2+7k-6=0$ $k1{,}2=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 24(-6)}}{2\cdot 24}$ $k1{,}2=\frac{-7\pm\sqrt{49+576}}{48}$ $k1{,}2=\frac{-7\pm\sqrt{625}}{48}$ $k1{,}2=\frac{-7\pm 25}{48}$ $k1=\frac{-7-25}{48}=\frac{-32}{48}=-\frac{2}{3}$ $k2=\frac{-7+25}{48}=\frac{18}{48}=\frac{3}{8}$ $n1=-2k+7=-2\left(-\frac{2}{3}\right)+7=\frac{4}{3}+7=\frac{25}{3}$ $n2=-2k+7=-2\frac{3}{8}+7=-\frac{6}{8}+7=\frac{50}{8}$ Па су једначинетангенти $y=kx+n,$: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{25}{3}$ $y=\frac{3}{8}x+\frac{50}{8}$
ЗАДАЋА:	1. Испитај узајамни положај праве $x+y=5$ и елипсе $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1.$ 2. Одреди тангенту елипсе $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ у тачки додира $\mathrm{M}(2,-3)$.
ЛИТЕРАТУРА:	• Математика за 3 разред средње школе (Јован Кечкић) • Збирка ријешених задатака из математике за 3 разред средње школе (Владимир Стојановић, Нинослав Ћирић)
ПРИЛОГ:	