РЕПУБЛИКА СРПСКА
ЈУ СРЕДЊОШКОЛСКИ ЦЕНТАР ''НИКОЛА ТЕСЛА'' БРОД
Ул. Краља Петра I Ослободиоца 7, 74450 Брод, тел: 053/610-094, факс: 053/610-093, web: www.ssntb.org, e-mail: ss47@skolers.org

ДАТУМ:	29. март 2021. године
РЕАЛИЗАТОР:	Анита Лучановић
РАЗРЕД , ОДЈЕЉЕЊЕ И ЧАС:	III 5
НАСТАВНИ ПРЕДМЕТ:	Математика
НАСТАВНО ПОДРУЧЈЕ:	Аналитичка геометрија
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Права и елипса
ТИП ЧАСА:	Обрада
ОЧЕКИВАНИ ИСХОДИ:	Ученик треба да за задану праву утврди у каквом је односу са заданом кривом другог реда.
САДРЖАЈ ЧАСА:	

ПРАВА И ЕЛИПСА

Однос неке праве $y = kx + n$ и елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ може се разматрати помоћу система једначина

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + n \end{cases}$$

Ако замјенимо y из друге једначине у прву једначину, а затим добијену једначину траснформишемо, доћи ћемо до квадратне једначине:

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

Дискриминанта ове једначине је

$$D = (2a^2kn)^2 - 4(a^2k^2 + b^2)^2a^2(n^2 - b^2)$$
$$D = 4a^4k^2n^2 - 4a^2(a^2k^2 + b^2)(n^2 - b^2)$$
$$D = 4a^2(a^2k^2n^2 - (a^2k^2 + b^2)(n^2 - b^2))$$
$$D = 4a^2(a^2k^2n^2 - (a^2k^2n^2 + b^2n^2 - a^2k^2b^2 - b^4))$$
$$D = 4a^2(a^2k^2n^2 - a^2k^2n^2 - b^2n^2 + a^2k^2b^2 + b^4)$$
$$D = 4a^2(-b^2n^2 + a^2k^2b^2 + b^4)$$
$$D = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - n^2)$$

У зависности од D квадрантна једначина има 2 реална рјешења, двоструко рјешење или има комплексно конјугована рјешења.
Па ако је израз у загради позитиван, ако је $a^2k^2 + b^2 - n^2 > 0$, тада права и елипса имају двије заједничке тачке.
Ако је $a^2k^2 + b^2 - n^2 < 0$, тада права и елипса немају заједничких тачака, не сјеку се.
Ако је $a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$, тада систем има двоструко рјешење, тј. права је тангента елипсе.

Дакле, **права $y = kx + n$ је тангента елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако и само ако је испуњен услов**

$$\boldsymbol{a^2k^2 + b^2 = n^2}.$$

У случају праве $x = m$, имаћемо систем

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=m\end{cases}$$

Tj.

$$\begin{cases}y^2=b^2\frac{a^2-\ m^2}{a^2}\\ x=m\end{cases}$$

Посљедњи систем може имати двоструко рјешење само у случају $\frac{m^2}{a^2}=1$, тј.$m=\pm a$. У овом случају је једначина тангенте $x=\pm a$.

Примјер 1

Одредимо једначину тангенте елипсе $x^2+4y^2=100$ која пролази кроз тачку $\mathrm{M}(2,7)$.

Рјешење:

Повјеримо да ли тачка М припада елипси:

$\mathrm{M}(2,7)$, па је $x=2, y=7$.

$$x^2+4y^2=100$$
$$2^2+4\cdot7^2=100$$
$$4+4\cdot49=100$$
$$4+196=100$$
$$200=100$$

Што није тачно, па тачка не припада елипси.

Произвољна права пролази кроз тачку $\mathrm{M}(2,7)$, која није паралелна у оси и има једначину

$$y-y1=k(x-x1)$$
$$y-7=k(x-2)$$
$$y=kx-2k+7$$

Дакле, $n=-2k+7$.

Одредимо канонсли облик елипсе $x^2+4y^2=100$:

$$x^2+4y^2=100\ /:100$$
$$\frac{x^2}{100}+\frac{4y^2}{100}=\frac{100}{100}$$
$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$$

имамо да је $a^2=100, a\ =10$ и $b^2=25, b=5$.

Услов додира је

$$a^2k^2+b^2=n^2$$
$$100k^2+25=(-2k+7)^2$$
$$100k^2+25=4k^2-28k+49$$
$$100k^2+25-4k^2+28k-49=0$$
$$96k^2+28k-24=0\ \ /:4$$
$$24k^2+7k-6=0$$
$$k1,2=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot24(-6)}}{2\cdot24}$$
$$k1,2=\frac{-7\pm\sqrt{49+576}}{48}$$
$$k1,2=\frac{-7\pm\sqrt{625}}{48}$$
$$k1,2=\frac{-7\pm25}{48}$$
$$k1=\frac{-7-25}{48}=\frac{-32}{48}=-\frac{2}{3}$$
$$k2=\frac{-7+25}{48}=\frac{18}{48}=\frac{3}{8}$$

$$n1 = -2k + 7 = -2\left(-\frac{2}{3}\right) + 7 = \frac{4}{3} + 7 = \frac{25}{3}$$
$$n2 = -2k + 7 = -2\frac{3}{8} + 7 = -\frac{6}{8} + 7 = \frac{50}{8}$$

Па су једначинетангенти $y = kx + n,$:
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$$

$$y = \frac{3}{8}x + \frac{50}{8}$$

Права која пролаи кроз тачку М и паралелна је у оси има једначину $x = 1$, али не може бити тангента елипсе пошто систем
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$
Нема двоструко рјешење.

Једначина тангенте елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, која садржи тачку *M*($x_0, y_0$) те елипсе има облик
$$\boldsymbol{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Примјер 2

Тачка М$(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ припада елипси $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, пошто је
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$
$$\frac{1^2}{4} + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$
Онда је једначина тангенте дата са
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$\frac{1 \cdot x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y = 1$$
$$\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} y = 1$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} y = 1 - \frac{x}{4}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} y = \frac{4 - x}{4} \quad / \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$y = \frac{4 - x}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(4 - x)\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3} - x\sqrt{3}}{6} = \frac{-x\sqrt{3}}{6} + \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{6}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Примјер 3

Наћи заједничке тангенте елипсе $x^2 + y^2 = 8$ и елипсе $x^2 + 3y^2 = 12$.

Рјешење:

Нека је једначина заједничке тангете $y = kx + n$.

1. Канонски облик једначине елипсе $x^2 + y^2 = 8$ је
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} = 1$$
па имамо да је $a^2 = 8, a = \pm 2\sqrt{2}$ и $b^2 = 8, b = \pm 2\sqrt{2}$.

Услов додира је
$$a^2 k^2 + b^2 = n^2$$
$$8k^2 + 8 = n^2$$

<table>
<tr><td></td><td>

2. Канонски облик једначине елипсе $x^2 + 3y^2 = 12$

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$$

па имамо да је $a^2 = 12, a = \pm 2\sqrt{3}$ и $b^2 = 4, b = \pm 2$.

Услов додира је

$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$
$$12k^2 + 4 = n^2$$

Ријешимо систем:

$$\begin{cases} 8k^2 + 8 = n^2 \\ 12k^2 + 4 = n^2 \end{cases}$$

Одузимањем ове двије једначине добијамо

$$4k^2 - 4 = 0$$
$$4k^2 = 4$$
$$k^2 = 1$$
$$k = \pm 1$$

Уврстимо ли у прву једначину добијамо:

$$8 + 8 = n^2$$
$$n^2 = 16$$
$$n = \pm 4$$

Једначина заједничке тангете је$y = kx + n$:

a) $y = x + 4$ тј. $x - y + 4 = 0$
b) $y = x - 4$ тј. $x - y - 4 = 0$
c) $y = -x + 4$ тј. $x + y - 4 = 0$
d) $y = -x - 4$ тј. $x + y + 4 = 0$

</td></tr>
<tr><td>ЗАДАЋА:</td><td>788. б) и 799. задатак у збирци.</td></tr>
<tr><td>ЛИТЕРАТУРА:</td><td>

- Математика за 3 разред средње школе (Јован Кечкић)
- Збирка ријешених задатака из математике за 3 разред средње школе (Владимир Стојановић, Нинослав Ћирић)

</td></tr>
<tr><td>ПРИЛОГ:</td><td></td></tr>
</table>