



РЕПУБЛИКА СРПСКА
ЈУ СРЕДЊОШКОЛСКИ ЦЕНТАР "НИКОЛА ТЕСЛА" БРОД

Ул. Краља Петра I Ослободиоца 7, 74450 Брод, тел: 053/610-094, факс: 053/610-093, web: www.ssnbtb.org, e-mail: ss47@skolers.org

ДАТУМ:	25. март 2021. године
РЕАЛИЗАТОР:	Анита Лучановић
РАЗРЕД, ОДЈЕЉЕЊЕ И ЧАС:	III 5
НАСТАВНИ ПРЕДМЕТ:	Математика
НАСТАВНО ПОДРУЧЈЕ:	Аналитичка геометрија
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Права и парабола
ТИП ЧАСА:	Ново / Вјежба
ОЧЕКИВАНИ ИСХОДИ:	Ученик треба да нађе једначину тангенте на дату криву другог реда која пролази кроз дату тачку, одреди угао између параболе и праве ;
САДРЖАЈ ЧАСА:	<p style="text-align: center;"><u>ПРАВА И ПАРАБОЛА</u></p> <p>Услов да права $y = kx + n$ буде тангента параболе $y^2 = 2px$ је: $2kn = p.$<p>Ако тачка $A(x_0, y_0)$ припада параболу тада је тангента параболу права: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$</p><p>Примјер 1 Наћи једначину тангенте параболу $y^2 = 8x$ која је паралелна правој $2x + 2y - 3 = 0$. <i>Рјешење:</i> Прво одређујемо коефицијент правца дате праве са којим наша тангента треба да буде једнака ($k_t = k_p$ ако су праве паралелне). Дакле, треба да одредимо експлицитни облик праве:</p>$\begin{aligned} 2x + 2y - 3 &= 0 \\ 2y &= -2x + 3 \quad /: 2 \\ y &= -\frac{2}{2}x + \frac{3}{2} \\ y &= -x + \frac{3}{2} \end{aligned}$<p>Па је $k_t = k_p = -1$, па је -1 коефицијент правца тангенте, $k = -1$. Из једначине параболу $y^2 = 8x = 2px$ имамо да је $2p = 8$, то јест $p = 4$. Сада користимо услов да права буде тангента да би одредили n:</p>$\begin{aligned} 2kn &= p \\ 2(-1)n &= 4 \\ -2n &= 4 \\ n &= \frac{4}{-2} \\ n &= -2 \end{aligned}$<p>Одакле је тангента параболу:</p>$y = kx + n$</p>

$$y = -1x - 2$$

$$y = -x - 2$$

Примјер 2

Напиши једначину тангенте параболе $y^2 = 20x$ из тачке $A(5, -10)$.

Рјешење:

Прво испитујемо да ли тачка припада параболу:

$$x = 5, y = -10$$

$$y^2 = 20x$$

$$(-10)^2 = 20 \cdot 5$$

$$100 = 100$$

Што је тачно, па тачка припада параболу.

Ако тачка припада параболу тада је тангента:

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0)$$

$$y \cdot (-10) = p(x + 5)$$

Из једначине параболу $y^2 = 20x = 2px$ имамо да је $2p = 20$, то јест $p = 10$.

$$y \cdot (-10) = 10(x + 5)$$

$$-10y = 10x + 50 /: (-10)$$

$$y = -x - 5$$

Примјер 3

Напиши једначину тангенте параболу $y^2 = 36x$ из тачке $A(2, 9)$.

Рјешење:

Прво испитујемо да ли тачка припада параболу:

$$x = 2, y = 9$$

$$y^2 = 36x$$

$$9^2 = 36 \cdot 2$$

$$81 = 72$$

Што није тачно, па тачка не припада параболу.

Затим, убацујемо тачке у једначину праве

$$y = kx + n$$

$$9 = 2k + n$$

$$n = 9 - 2k$$

Из једначине параболу $y^2 = 36x = 2px$ имамо да је $2p = 36$, то јест $p = 18$.

Сада користимо услов да права буде тангента да би одредили n :

$$2kn = p$$

$$2k(9 - 2k) = 18$$

$$18k - 4k^2 = 18$$

$$-4k^2 + 18k - 18 = 0 \quad /: 2$$

$$-2k^2 + 9k - 9 = 0 \quad /: 2$$

$$k_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(-2)(-9)}}{2(-2)}$$

$$k_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{-4}$$

$$k_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{-4}$$

$$k_{1,2} = \frac{-9 \pm 3}{-4}$$

$$k_1 = \frac{-9 + 3}{-4}$$

$$k_1 = \frac{-6}{-4}$$

$$k_1 = \frac{3}{2}$$

$$k_2 = \frac{-9 - 3}{-4}$$

$$k_2 = \frac{-12}{-4}$$

$$k_2 = 3$$

Па је онда

$$n_1 = 9 - 2k = 9 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 9 - 3 = 6$$

$$n_2 = 9 - 2k = 9 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3$$

Одакле су тангенте параболе:

$$y = kx + n$$

$$y = \frac{3}{2}x + 6$$

$$y = 3x + 3$$

Примјер 4

Под којим углом права $2x + y - 12 = 0$ сијече параболу $y^2 = 4x$.

Рјешење:

Да бисмо одредили угао између праве и параболе, потребно је да одредимо угао између дате праве и тангенте конструисане у тачки пресека праве и параболе.

Дакле, рјешење се састоји из три корака:

1. Одредити тачку пресека праве и параболе;
2. Одредити тангенту параболе у датој тачки;
3. Одредити угао између праве и тангенте.

1. Одредити тачку пресека праве и параболе

Ријешимо систем

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases}$$

Из друге једначине је $y = -2x + 12$, па је

$$y^2 = 4x$$

$$(-2x + 12)^2 = 4x$$

$$4x^2 - 48x + 144 = 4x$$

$$4x^2 - 48x + 144 - 4x = 0$$

$$4x^2 - 52x + 144 = 0 /: 4$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 9$$

$$y_1 = -2 \cdot 4 + 12 = -8 + 12 = 4$$

$$y_2 = -2 \cdot 9 + 12 = -18 + 12 = -6$$

Па су тачке пресека праве и параболе $M_1(4,4)$ и $M_2(9,-6)$.

2. Одредити тангенту параболе у датој тачки

Одредимо једнаћину тангенте у тачки $M_1(4,4)$ (бирамо једну од двије пресјечне тачке) на параболу $y^2 = 4x$.

Како је $y^2 = 4x$, то је $p = 2$.

Произвољна права која садржи тачку $M(4,4)$ и није паралелна $y -$ оси има једначину

$$y - 4 = k(x - 4)$$

$$y = k(x - 4) + 4$$

$$y = kx - 4k + 4$$

$$y = kx + 4 - 4k$$

Па је коефицијент правца праве k , и $n = 4 - 4k$.

Из услова додира параболе је

$$p = 2kn$$

$$2 = 2k(4 - 4k) /: 2$$

$$1 = 4k - 4k^2$$

$$4k^2 - 4k + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2}$$

$$n = 4 - 4k = 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 - 2 = 2$$

Према томе једначина тангенте је:

$$y = kx + n$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad / \cdot 2$$

$$2y = x + 4$$

$$-x + 2y - 4 = 0$$

3. Одредити угао између праве и тангенте

Општи облик једначине праве је $2x + y - 12 = 0$, па је $A_1=2$ и $B_1=1$.

Општи облик једначине тангенте је $-x + 2y - 4 = 0$, па је $A_2=-1$ и $B_2=2$.

Угао између двије праве дат је формулом:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

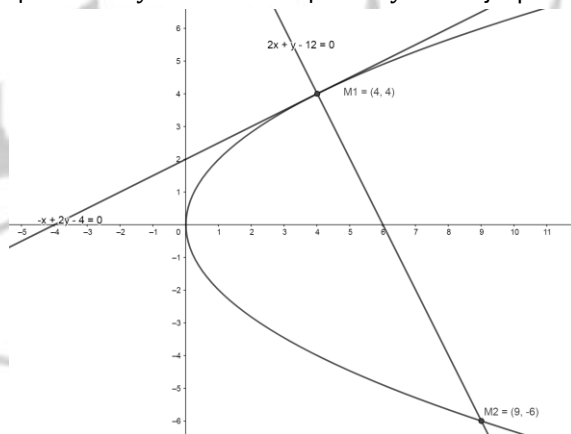
$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{-2 + 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\cos \varphi = \frac{0}{5} = 0$$

$$\varphi = 90^\circ$$

Дакле угао између праве $2x + y - 12 = 0$ и параболу $y^2 = 4x$ је $\varphi = 90^\circ$.



ЗАДАЋА:

830. а) у збирци.

ЛИТЕРАТУРА:

- Математика за 3 разред средње школе (Јован Кечкић)
- Збирка ријешених задатака из математике за 3 разред средње школе (Владимир Стојановић, Нинослав Ђирић)

ПРИЛОГ: