РЕПУБЛИКА СРПСКА
ЈУ СРЕДЊОШКОЛСКИ ЦЕНТАР ''НИКОЛА ТЕСЛА'' БРОД
Ул. Краља Петра I Ослободиоца 7, 74450 Брод, тел: 053/610-094, факс: 053/610-093, web: www.ssntb.org, e-mail: ss47@skolers.org

ДАТУМ:	13. април 2021. године
РЕАЛИЗАТОР:	Анита Лучановић
РАЗРЕД , ОДЈЕЉЕЊЕ И ЧАС:	III 1
НАСТАВНИ ПРЕДМЕТ:	Математика
НАСТАВНО ПОДРУЧЈЕ:	Аналитичка геометрија
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Права и хипербола
ТИП ЧАСА:	Обрада
ОЧЕКИВАНИ ИСХОДИ:	Ученик треба да за задану праву утврди у каквом је односу са заданом кривом другог реда.
САДРЖАЈ ЧАСА:	

ПРАВА И ХИПЕРБОЛА

Однос неке праве $y = kx + n$ и хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ може се разматрати помоћу система једначина

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + n \end{cases}$$

Ако је $n^2 + b^2 - a^2k^2 > 0$, тада права и хипербола имају двије заједничке тачке.
Ако је $n^2 + b^2 - a^2k^2 < 0$, тада права и хипербола немају заједничких тачака, не сјеку се.
Ако је $n^2 + b^2 - a^2k^2 = 0$, права је тангента хиперболе.

Дакле, **права $y = kx + n$ је тангента хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако и само ако је испуњен услов**

$$\boldsymbol{a^2k^2 - b^2 = n^2}.$$

Примјер 1

Испитај узајамни положај праве $2x + y = 3$ и елипсе хиперболе $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Рјешење:

Једнчина хиперболе је $4x^2 - 9y^2 = 36$, морамо одредити њен каннски облик. То добијамо дијељењем дате једначине са 36:

$$\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

па је $a^2 = 9, a = 3, b^2 = 4, b = 2$.

Одредимо експлицитни облик једначине праве $2x + y = 3$:

$$y = -2x + 3$$

Па је $\mathrm{k} = -2, \mathrm{n} = 3$.

Испитајмо сада какав је израз

$$n^2 + b^2 - a^2k^2$$

$$3^2 + 2^2 - 3^2 \cdot (-2)^2$$

	$$9 + 4 - 9 \cdot 4$$ $$13 - 36$$ $$-23 < 0$$ тада права и хипербола немају заједничких тачака, не сјеку се. **Једначина тангенте хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, која садржи тачку $M(x_0, y_0)$ те хиперболе има облик** $$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$ ***Примјер 2*** Одреди тангенту хиперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ у тачки додира $M(6,4)$. *Рјешење:* Тачка $M(6,4)$ припада хиперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$, пошто је $$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$ $$\frac{6^2}{4} - \frac{4^2}{2} = 1$$ $$\frac{36}{4} - \frac{16}{2} = 1$$ $$9 - 8 = 1$$ Што је тачно. Једначина хиперболе је $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$, па је $a^2 = 4, a = 2, b^2 = 2, b = \sqrt{2}$. Онда је једначина тангенте дата са $$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$ $$\frac{6x}{4} - \frac{4y}{2} = 1$$ Множећи са 4 добијамо: $$\frac{6x}{4} \cdot 4 - \frac{4y}{2} \cdot 4 = 1 \cdot 4$$ $$6x - 8y = 4$$ $$6x - 8y - 4 = 0$$ ***Примјер 3*** Из тачке $M(1,1)$ конструишимо тангенту хиперболе $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Рјешење: Тачка $M(1,1)$ није тачка хиперболе како је $$\frac{1^2}{4} - \frac{1^2}{9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36} \neq 1$$ па не можемо користити претходно тврђење. Произвољна права пролази кроз тачку $M(1,1)$, која није паралелна у оси и има једначину $$y - y1 = k(x - x1)$$ $$y - 1 = k(x - 1)$$ $$y = kx + 1 - k$$ Дакле, $n = 1 - k$. Из хиперболе $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ имамо да је $a^2 = 4, a = \pm 2$ и $b^2 = 9, b = \pm 3$. Услов додира је $$a^2 k^2 - b^2 = n^2$$ $$4k^2 - 9 = (1 - k)^2$$ $$4k^2 - 9 = 1 - 2k + k^2$$ $$4k^2 - 9 - 1 + 2k - k^2 = 0$$ $$3k^2 + 2k - 10 = 0$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$k=\frac{-1\pm\sqrt{31}}{3}$$

$$n1=1-k1=1-\frac{-1-\sqrt{31}}{3}=\frac{3+1+\sqrt{31}}{3}=\frac{4+\sqrt{31}}{3}$$

$$n2=1-k2=1-\frac{-1+\sqrt{31}}{3}=\frac{3+1-\sqrt{31}}{3}=\frac{4-\sqrt{31}}{3}$$

Па су једначине тангенти$y=kx+n,$ тј.

$$y=\frac{-1-\sqrt{31}}{3}x+\frac{4+\sqrt{31}}{3}$$

$$y=\frac{-1+\sqrt{31}}{3}x+\frac{4-\sqrt{31}}{3}$$

Права која пролаи кроз тачку М и паралелна је у оси има једначину $x=1$, али не може бити тангента хиперболе пошто систем

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\\ x=1\end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>ЗАДАЋА:</td>
<td>

1. Испитај узајамни положај праве $x+y=5$ и хиперлобе $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1.$
2. Одреди тангенту хиперболе $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$ у тачки додира $\mathrm{M}(4,2)$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>ЛИТЕРАТУРА:</td>
<td>

- Математика за 3 разред средње школе (Јован Кечкић)
- Збирка ријешених задатака из математике за 3 разред средње школе (Владимир Стојановић, Нинослав Ћирић)

</td>
</tr>
<tr>
<td>ПРИЛОГ:</td>
<td></td>
</tr>
</table>