РЕПУБЛИКА СРПСКА
ЈУ СРЕДЊОШКОЛСКИ ЦЕНТАР ''НИКОЛА ТЕСЛА'' БРОД
Ул. Краља Петра I Ослободиоца 7, 74450 Брод, тел: 053/610-094, факс: 053/610-093, web: www.ssntb.org, e-mail: ss47@skolers.org

ДАТУМ:	1. април 2021. године
РЕАЛИЗАТОР:	Анита Лучановић
РАЗРЕД , ОДЈЕЉЕЊЕ И ЧАС:	III 5
НАСТАВНИ ПРЕДМЕТ:	Математика
НАСТАВНО ПОДРУЧЈЕ:	Аналитичка геометрија
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Права и хипербола
ТИП ЧАСА:	Обрада
ОЧЕКИВАНИ ИСХОДИ:	Ученик треба да за задану праву утврди у каквом је односу са заданом кривом другог реда.
САДРЖАЈ ЧАСА:	

ПРАВА И ХИПЕРБОЛА

Однос праве $y = kx + n$ и хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ може се разматрати помоћу система једначина

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + n \end{cases}$$

Ако је $n^2 + b^2 - a^2k^2 > 0$, тада права и хипербола имају двије заједничке тачке.
Ако је $n^2 + b^2 - a^2k^2 < 0$, тада права и хипербола немају заједничких тачака, не сјеку се.
Ако је $n^2 + b^2 - a^2k^2 = 0$, тада систем има двоструко рјешење, тј. права је тангента хиперболе.

Дакле, **права $y = kx + n$ је тангента хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако и само ако је испуњен услов**

$$\boldsymbol{a^2k^2 - b^2 = n^2}.$$

Права $x = m$, може бити тангента хипрболе само у случају да систем

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = m \end{cases}$$

има двостуко рјешење. Елиминацијом промјенљиве x лако се закључује да је то могуће само ако је $m = \pm a$, тј. дасу једначине тангенната$x = \pm a$.

Једначина тангенте хиперболе$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, која садржи тачку $M(x_0, y_0)$ те хиперболе има облик

$$\boldsymbol{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}.$$

Примјер 1

Из тачке $\mathrm{M}(1,1)$ конструишимо тангенту хиперболе $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Рјешење:

Тачка $\mathrm{M}(1,1)$ није тачка хиперболе како је

$$\frac{1^2}{4}-\frac{1^2}{9}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{9-4}{36}=\frac{5}{36}\neq 1$$

па не можемо користити претходно тврђење.

Произвољна права пролази кроз тачку $\mathrm{M}(1,1)$, која није паралелна у оси и има једначину

$$y-y1=k(x-x1)$$
$$y-1=k(x-1)$$
$$y=kx+1-k$$

Дакле, $n=1-k$.

Из хиперболе $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ имамо да је $a^2=4, a\ =\pm 2$ и $b^2=9, b=\pm 3$.

Услов додира је

$$a^2k^2-b^2=n^2$$
$$4k^2-9=(1-k)^2$$
$$4k^2-9=1-2k+k^2$$
$$4k^2-9-1+2k-k^2=0$$
$$3k^2+2k-10=0$$
$$k=\frac{-1\pm\sqrt{31}}{3}$$
$$n1=1-k1=1-\frac{-1-\sqrt{31}}{3}=\frac{3+1+\sqrt{31}}{3}=\frac{4+\sqrt{31}}{3}$$
$$n2=1-k2=1-\frac{-1+\sqrt{31}}{3}=\frac{3+1-\sqrt{31}}{3}=\frac{4-\sqrt{31}}{3}$$

Па су једначине тангенти$y=kx+n,$ тј.

$$y=\frac{-1-\sqrt{31}}{3}x+\frac{4+\sqrt{31}}{3}$$
$$y=\frac{-1+\sqrt{31}}{3}x+\frac{4-\sqrt{31}}{3}$$

Права која пролаи кроз тачку М и паралелна је у оси има једначину $x=1$, али не може бити тангента хиперболе пошто систем

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\\ x=1\end{cases}$$

Примјер 2

Наћи тангенте хиперболе $5x^2-9y^2=45$ које су паралелне датој правој $x-y+7=0$.

Рјешење:

Нека је једначине тангенте$y=kx+n$.

Канонски облик једначине хиперболе је

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$$

имамо да је $a^2=9, a\ =\pm 3$ и $b^2=5, b=\pm\sqrt{5}$.

Експлицитни облик једначине праве је

$$x-y+7=0$$
$$-y=-x-7$$
$$y=\ x+7$$

Па је $k_1=1$, а двије паралелне праве имају исти коефицијент правца па је коефицијент правца тангенте $k=k_1=1$

Услов додира је

$$a^2k^2-b^2=n^2$$
$$9\cdot 1^2-5=n^2$$
$$9-5=n^2$$

	$$n^2 = 4$$ $$n = \pm 2$$ Па су једначине тангенти $y = kx + n$, тј. $$y = x + 2$$ $$y = x - 2$$ или у општем облику $$x - y + 2 = 0$$ $$x - y - 2 = 0$$ ***Примјер 3*** Наћи тангенте хиперболе $x^2 - 2y^2 = 4$ које са датом правом $x + y - 3 = 0$ граде прави угао. Рјешење: Нека је једначине тангенте $y = kx + n$. Канонски облик једначине хиперболе је $$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$ имамо да је $a^2 = 4, a = \pm 2$ и $b^2 = 2, b = \pm\sqrt{2}$. Експлицитни облик једначине праве је $$x + y - 3 = 0$$ $$y = -x + 3$$ дакле је $k_1 = -1$. Услов нормалности двије праве је $$1 + k \cdot k_1 = 0$$ $$1 + k \cdot (-1) = 0$$ $$1 - k = 0$$ тј. $k = 1$. Услов додира је $$a^2k^2 - b^2 = n^2$$ $$4 \cdot 1^2 - 2 = n^2$$ $$4 - 2 = n^2$$ $$n^2 = 2$$ $$n = \pm\sqrt{2}$$ Па су једначине тангенти $y = kx + n$, тј. $$y = x + \sqrt{2}$$ $$y = x - \sqrt{2}$$ или у општем облику $$x - y + \sqrt{2} = 0$$ $$x - y - \sqrt{2} = 0$$ ***Примјер 4*** Одредити једначину хиперболе ако је дата тангента $5x - 6y - 8 = 0$ и асимптота $y = \pm\frac{x}{2}$. Рјешење: Канонски облик једначине хиперболе је $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Асимптотахиперболе је $y = \pm\frac{bx}{a} = \pm\frac{x}{2}$, па је $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, тј. $a = 2b$. Експлицитни облик једначине тангенте је $$5x - 6y - 8 = 0$$ $$-6y = 5x + 8$$ $$y = -\frac{5}{6}x - \frac{8}{6}$$

	одакле је $k=-\frac{5}{6}$, $n=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$. Услов додира је $$a^2k^2-b^2=n^2$$ $$(2b)^2\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)^2-b^2=(-\frac{4}{3})^2$$ $$4b^2\cdot\frac{25}{36}-b^2=\frac{16}{9}\quad /\cdot 36$$ $$100b^2-36b^2=64$$ $$64b^2=64$$ $$b^2=1$$ $$b=\pm 1$$ $$a=2b=\pm 2$$ Паје једначина хиперболе $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ $$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1\quad /\cdot 4$$ или $$x^2-4y^2=4$$
ЗАДАЋА:	816. и 814. г). задатак у збирци.
ЛИТЕРАТУРА:	• Математика за 3 разред средње школе (Јован Кечкић) • Збирка ријешених задатака из математике за 3 разред средње школе (Владимир Стојановић, Нинослав Ћирић)
ПРИЛОГ:	